Systèmes de retraite et accumulation du capital : un modèle à générations imbriquées avec durée de vie incertaine

Nicolas DROUHIN (*)
GRID, École Normale Supérieure de Cachan

Les différents systèmes de retraite sont souvent jugés au regard de leur impact supposé sur l'accumulation du capital. Le modèle à générations imbriquées introduit par Allais [1947] et Samuelson [1958], dans sa version avec production et accumulation de capital (Diamond [1965]) constitue le cadre théorique habituel pour étudier ce problème. La caractéristique principale en est que l'équilibre peut être dynamiquement inefficace, en ce sens que les générations présentes et à venir verraient toutes leur bien-être augmenter du fait d'une moindre accumulation. On parle alors de suraccumulation. En première analyse, une économie sera dynamiquement inefficace si la productivité marginale du capital est inférieure au taux de croissance de l'économie.

Dans ce cadre, on démontre qu'un système de retraite par répartition, c'est à dire un système dans lequel les cotisations de retraite des jeunes sont immédiatement reversées aux vieux de la génération précédente, diminue l'épargne et donc l'accumulation du capital. La mise en place d'un tel système constitue donc un moyen de rendre l'économie dynamiquement efficace lorsqu'elle ne l'est pas au départ.

À l'inverse, dans les périodes où l'on observe des taux d'intérêts réels élevés, la retraite par répartition peut apparaître comme un frein à l'activité et à la croissance.

Quel va être l'effet de l'autre grand type de système de retraite, la capitalisation ? Dans un système de retraite par capitalisation, les cotisations sont accumulées dans des fonds de pensions et reversées à une date ultérieure à ceux qui ont cotisé. Dans un modèle à générations imbriquées, ce type de système n'a aucun effet sur l'accumulation du capital. La retraite par capitalisation est un parfait substitut à l'épargne privée (Samuelson [1975]).

(*) Je tiens à remercier B. Crettez, G. Ghez, I. Job, P. Michel, B. Munier, J.-P. Vidal et deux rapporteurs anonymes pour leurs remarques et commentaires. Bien entendu les erreurs restent miennes.

Dans une telle perspective, le remplacement de la répartition (qui a un effet négatif) par la capitalisation (qui n'a aucun effet), provoquerait une augmentation de l'accumulation du capital, et donc de la richesse future de l'économie.

Cette dernière proposition, très souvent avancée, mérite une objection. Pourquoi créer un système socialisé, la capitalisation, dont la gestion va nécessairement être coûteuse, s'il n'apporte rien de plus qu'un système décentralisé, l'épargne privée? En suivant Diamond [1977], deux justifications de la capitalisation peuvent être retenues.

Premièrement, les individus peuvent être myopes en ce sens qu'ils ne réalisent pas pleinement qu'ils ne pourront plus subvenir à leurs besoins lorsqu'ils seront vieux. Laissés à eux même, ils n'épargneront pas assez pour leurs vieux jours. La retraite par capitalisation est donc un moyen pour un État paternaliste de forcer les agents à épargner dans leur propre intérêt. Bien entendu cet argument ne peut que poser problème aux économistes. En particulier, l'économie du bien-être cherche à élaborer et à discuter des normes sociales en partant des choix individuels. Qu'est-ce qui fonde la norme sociale dans le cas du paternalisme?

L'autre justification est à chercher dans les défaillances du marché des rentes viagères en raison des problèmes d'asymétrie d'information. Un système de retraite fournit un service d'assurance contre le risque de vivre vieux et démuni. Ces problèmes, qui nécessitent de prendre en compte l'incertitude sur la durée de vie de l'agent, sont biens étudiés dans la littérature, mais le plus souvent dans un cadre d'équilibre partiel. On ne peut alors rien dire sur l'accumulation du capital.

Ainsi, on se trouve confronté à un paradoxe, puisque l'absence d'effets négatifs des systèmes de retraite par capitalisation sur l'accumulation du capital a été démontrée dans un cadre, le modèle à générations imbriquées, où aucune hypothèse n'est faite pour justifier la mise en place d'un tel système.

L'objet de ce papier est précisément d'évaluer l'impact des différents systèmes de retraite sur l'accumulation du capital dans un cadre qui prenne explicitement en compte l'incertitude sur la durée de vie et donc où la capitalisation a un intérêt en elle même. Nous démontrerons alors que contrairement à ce qui est le plus souvent affirmé, un système de retraite par capitalisation induit une accumulation du capital moins importante que lorsque la décision d'épargne est décentralisée.

Nous construisons donc un modèle à générations imbriquées à durée de vie incertaine. Pour cela, nous nous appuierons sur un modèle de cycle de vie qui reprend le modèle de Yaari [1965] dans un cadre simplifié et en temps discret. Nous supposerons qu'il n'existe pas de marché des rentes viagères et que les agents ne sont pas altruistes envers leurs enfants, c'est à dire qu'ils ne souhaitent pas volontairement leur laisser d'héritage. Comme chez Diamond [1965], le support de l'épargne sera du capital physique utilisé dans une fonction de production néoclassique. A la différence de Abel [1985], nous simplifierons le traitement de l'héritage accidentel et nous supposerons une productivité marginale décroissante du capital. Contrairement à Karni & Zilcha [1989], nous autoriserons la croissance de la population et nous n'endogénéiserons pas l'offre de travail.

Après avoir présenté le modèle et l'équilibre de laissez faire (I), nous étudierons l'impact sur l'accumulation du capital de l'introduction d'un système de retraite par capitalisation (II) et d'un système de retraite mixte, associant capitalisation et répartition (III), enfin nous étudierons les propriétés du système de retraite optimal (IV). Notre approche va donc permettre de comparer du point de vue de l'accumulation du capital, mais aussi du bien-être, les systèmes de retraite lorsque ceux-ci répondent non seulement à un motif de transfert entre les générations, mais aussi à un motif d'assurance.

1 Un modèle à générations imbriquées avec durée de vie incertaine

1.1 Le cycle de vie de l'agent

Supposons une économie dans laquelle les agents vivent au plus deux périodes. Chaque agent à une probabilité $(1-p)$ de mourir à la fin de sa première période de vie, sa «jeunesse», et une probabilité p de mourir à la fin de sa deuxième période de vie, sa «vieillesse». Au cours de sa jeunesse l'agent va travailler et donc percevoir un salaire w, qui vient s'ajouter à un éventuel héritage d'un montant b. Ces ressources vont être employées soit comme consommation au cours de la période, soit comme épargne dans le but de consommer au cours de la période suivante. Si l'agent décède prématurément cette épargne bénéficiera à la génération suivante sous forme d'héritage. Si l'agent survit pour profiter de sa retraite, il consommera la totalité de son patrimoine, ce qui revient à faire l'hypothèse que l'agent n'est pas altruiste envers ses descendants. Ainsi, dans notre modèle, le seul héritage possible est dû à une mort prématurée.

Nous pouvons donc spécifier les contraintes budgétaires supportées par les agents nés à la période t, que nous qualifierons de «génération t»:

$$b_t + w_t = c_{0,t} + s_t . \tag{1}$$

$$s_t(1 + r_{t+1}) = c_{1,t} . \tag{2}$$

avec b_t, l'héritage reçu par un individu de la génération t ; w_t, le salaire reçu par chaque jeune à la période t ; $c_{0,t}$, la consommation de chaque agent de la génération t pendant sa jeunesse ; $c_{1,t}$, la consommation de chaque agent de la génération t ayant survécu, pendant sa vieillesse ; s_t, l'épargne réalisée par chaque agent de la génération t pendant sa jeunesse ; r_{t+1}, le taux d'intérêt de la période $t+1$.

En agrégeant (1) et (2) on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$c_{0,t} + \frac{c_{1,t}}{1+r_{t+1}} = b_t + w_t \,. \tag{3}$$

La valeur actualisée au taux de marché du profil de consommation au cours du cycle de vie est égale à la valeur actualisée au même taux du profil de revenus.

Nous supposons que l'agent est doté d'une fonction d'utilité additivement intertemporellement séparable qui dépend de sa durée de vie. De plus nous supposons que l'utilité de la consommation à chaque période est logarithmique.

Si l'agent vit une période :

$$U_t^1\,(c_{0,t}) = \ln(c_{0,t}) \,. \tag{4}$$

Si l'agent vit deux périodes :

$$U_t^2\,(c_{0,t}, c_{1,t}) = \ln(c_{0,t}) + \frac{1}{1+\theta}\ln(c_{1,t}) \,, \tag{5}$$

avec $u(\cdot)$, la fonction d'utilité de la période supposée croissante et concave ; θ, le taux psychologique de préférence pour le présent en certitude.

L'espérance d'utilité d'un agent de la génération t est donc :

$$EU_t\,(c_{0,t}, c_{1,t}) = (1-p)U_t^1\,(c_{0,t}) + pU_t^2\,(c_{0,t}, c_{1,t}) \,.$$

soit

$$EU_t\,(c_{0,t}, c_{1,t}) = \ln(c_{0,t}) + \frac{p}{1+\theta}\ln(c_{1,t}) \,. \tag{6}$$

L'agent maximise son espérance d'utilité (6) sous sa contrainte budgétaire intertemporelle (3). La solution du programme d'optimisation des agents est caractérisée par la condition du premier ordre :

$$\frac{u'(c_{0,t})}{u'(c_{1,t})} = \frac{c_{1,t}}{c_{0,t}} = \frac{p\,(1+r_{t+1})}{1+\theta} \,. \tag{7}$$

C'est le résultat bien connu de la théorie du cycle de vie/revenu permanent. La consommation croît à un taux égal au rapport entre le facteur d'escompte psychologique ($p/[1+\theta]$) et le facteur d'escompte économique ($1/[1+r_{t+1}]$). La seule différence ici provient du fait que le facteur d'escompte du temps est rendu plus faible par l'apparition d'une incertitude sur la durée de vie. Ce résultat est rigoureusement semblable à celui établi par Yaari [1965] en temps continu. La préférence pour le présent est renforcée par l'incertitude sur la durée de vie. La consommation en première période sera d'autant plus forte que la probabilité de survie est faible.

À l'aide de la contrainte budgétaire, on peut alors exprimer la consommation de toutes les périodes, ainsi que l'épargne, en fonction de la richesse initiale :

$$c_{0,t} = \frac{b_t + w_t}{1 + \frac{p}{1+\theta}} , \tag{8}$$

$$c_{1,t} = p\,\frac{b_t + w_t}{1+\theta+p}\,(1 + r_{t+1}) , \tag{9}$$

$$s_t = p\,\frac{b_t + w_t}{1+\theta+p} . \tag{10}$$

On remarque que l'épargne est une fonction croissante de p et donc qu'elle décroît avec la probabilité de mourir jeune.

1.2 L'équilibre du modèle avec production

Nous supposons que l'économie est à chaque période composée de deux générations qui coexistent. La taille des générations croît à taux constant n. De plus, nous supposons que l'économie est caractérisée par une fonction de production nette agrégée à deux facteurs de production, le capital et le travail. Nous retenons une formulation de type Cobb-Douglas, à rendements d'échelle constants (homogène de degré 1). L'offre de travail est supposée inélastique et égale au nombre de jeunes. On peut alors exprimer la production par actif en fonction du capital par actif :

$$f(k_t) = Ak_t^{\alpha} \quad , \quad A > 0 \quad , \quad 0 < \alpha < 1 , \tag{11}$$

avec $f(\cdot)$, la fonction de production par actif et k_t, le capital par actif.

L'économie est supposée concurrentielle en ce sens que les facteurs de production sont rémunérés à leur productivité marginale :

$$r_t = f'(k_t) = \alpha A k_t^{\alpha-1} . \tag{12}$$

$$w_t = f(k_t) - rk_t = (1-\alpha)Ak_t^{\alpha} . \tag{13}$$

Pour clore le modèle, il reste à expliciter la dynamique des héritages. Dans une telle économie, la répartition de la richesse est endogène.

En effet, une fraction p de chaque génération ne perçoit pas d'héritage, alors qu'une fraction $(1-p)$ en perçoit un. Parmi ces derniers, une fraction $(1-p)$ perçoit un héritage plus élevé du fait que leurs parents eux-mêmes ont hérité dans leur jeunesse. Parmi ceux-ci, une fraction $(1-p)$ percevra un héritage encore plus important du fait que leurs grands-parents eux-mêmes ont hérité... et ainsi de suite. Pour simplifier ce problème nous introduisons l'État, dont on suppose qu'il réalise la péréquation de tous les héritages, c'est à dire qu'il les taxe en totalité et les redistribue en parts égales entre les jeunes[1]. Comme nous avons retenu une fonction d'utilité logarithmique, on peut remarquer que l'épargne agrégée et donc l'héritage agrégé ne dépend pas de la répartition de la richesse. Cette simplification ne modifie donc en rien les résultats que nous obtiendrons dans la suite[2].

Nous avons donc :

$$N_{t+1}b_{t+1} = (1-p)N_t s_t (1+r_{t+1}) \ ,$$

avec N_t, la taille de la génération t.

Compte tenu de la croissance de la population au taux constant n :

$$b_{t+1} = \frac{1-p}{1+n} s_t (1+r_{t+1}) \ . \tag{14}$$

L'équation qui traduit la dynamique d'accumulation à l'équilibre est la même que dans le modèle à générations imbriquées standard :

$$N_{t+1}k_{t+1} = N_t s_t \ ,$$

soit

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1+n} \ . \tag{15}$$

En reportant cette valeur dans (14), on obtient :

$$b_t = (1-p)k_t (1+r_t) \ . \tag{16}$$

---

(1) Si l'État reversait en parts égales les héritages aux vieux survivants, on obtiendrait un système identique à un système de retraite par capitalisation tel que celui étudié dans la deuxième partie.

(2) Comme l'illustre Abel [1985], il en irait de même pour toute fonction d'utilité de type HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) dont la fonction logarithme est un cas particulier. En effet, les fonctions de consommation et d'épargne individuelle sont alors des fonctions affines de la richesse. Lorsque cette dernière est donnée au départ, consommation et épargne agrégées ne dépendent pas de la répartition initiale.

En reportant (16) et (10) dans (15), on obtient la dynamique sur le capital par tête :

$$k_{t+1} = \frac{p}{1+n} \frac{(1-p)k_t\left(1+\alpha A k_t^{\alpha-1}\right)+(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}}{1+\theta+p} = g\left(k_t\right). \quad (17)$$

Cette dynamique est illustrée par la Figure 1.

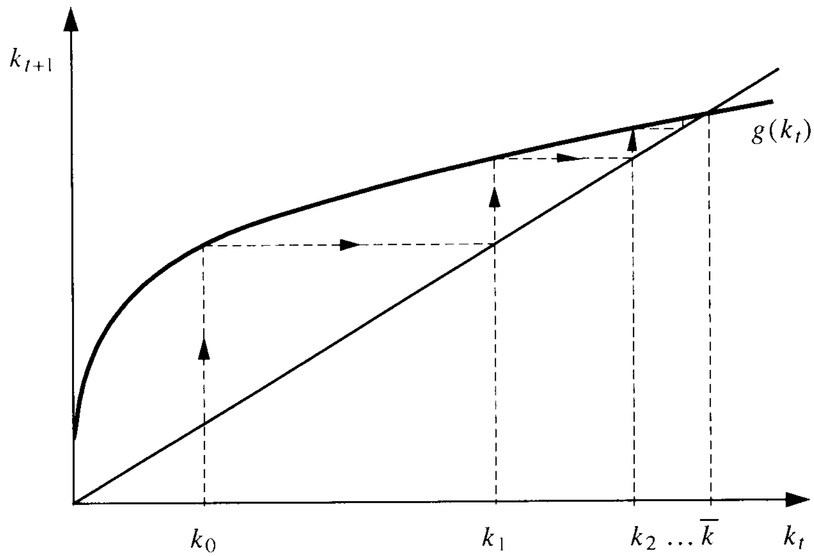

Figure 1: La dynamique du capital par tête

On peut calculer $\overline{k}$ et $\overline{r}$, le capital par tête et le taux d'intérêt à l'équilibre stationnaire :

$$\overline{k} = \left[\frac{p^{-1}(1+\theta+p)(1+n)-(1-p)}{A\left(\alpha(1-p)+(1-\alpha)\right)}\right]^{1/(\alpha-1)}, \quad (18)$$

$$\overline{r} = \frac{\alpha\left(p^{-1}(1+\theta+p)(1+n)-(1-p)\right)}{\alpha(1-p)+(1-\alpha)}. \quad (19)$$

Dans le cas particulier où $p=1$, on retrouve exactement le résultat du modèle à générations imbriquées avec accumulation du capital dans la lignée de Diamond [1965], lorsque l'on retient les mêmes spécifications des fonctions d'utilité et de production. Mais, même lorsque $p \neq 1$, ce qui constitue l'apport essentiel de notre modèle, la conclusion fondamentale est la même que celle du modèle de Diamond. En l'absence de transferts intergénérationnels organisés, l'équilibre spontané de l'économie n'a aucune raison de respecter la règle d'or, ni même d'être dynamiquement efficace.

En particulier, si l'on suppose que la totalité de la préférence pour le présent est expliquée par l'incertitude sur la durée de vie $(\theta = 0)$, on peut énoncer le résultat suivant[3] :

$$\begin{cases} \text{si } \dfrac{1+\alpha}{\alpha} \leqslant 2\,\dfrac{1+n}{n} & \text{alors } \forall p \in [0,1], \quad \overline{r} \geqslant n\,; \\ \text{si } \dfrac{1+\alpha}{\alpha} > 2\,\dfrac{1+n}{n} & \text{alors } \exists p_0 \in]0,1[\text{ tel que} \begin{cases} p \in [0, p_0[& \Rightarrow \quad \overline{r} > n\,, \\ p = p_0 & \Rightarrow \quad \overline{r} = n\,, \\ p \in]p_0, 1] & \Rightarrow \quad \overline{r} < n\,. \end{cases} \end{cases}$$

Remarquons que dans le deuxième cas, une augmentation de p, c'est à dire une augmentation de l'espérance de vie[4] peut faire basculer l'économie dans l'inefficacité dynamique. Il est alors tentant d'expliquer le développement historiquement situé des systèmes de retraites, qui ont justement pour propriété de faire disparaître ce type d'inefficacité, par l'augmentation de la probabilité de vivre vieux du fait des progrès de la médecine et des conditions de vie.

2 Système de retraite par capitalisation

2.1 Le cycle de vie de l'agent

Dans un système de retraite par capitalisation tous les individus payent une cotisation à une caisse de retraite quand ils sont jeunes. Ces cotisations sont investies et, à la période suivante, la caisse de retraite en repartit la totalité, majorée des d'intérêts, aux survivants[5] . Ainsi la contrainte budgétaire du système de retraite par capitalisation s'écrit :

$$\pi_t^c p N_t \;=\; z_t^c N_t \,(1 + r_{t+1})\;,$$

soit

$$\pi_t^c \;=\; z_t^c\,\frac{1 + r_{t+1}}{p}\;, \tag{20}$$

avec z_t^c, la cotisation par tête de chaque individu de la génération t et π_t^c, la pension par tête versée en $t+1$ aux survivants de la génération t.

---

(3) Il suffit d'étudier le signe de $\overline{r} - n$, ce qui revient à étudier le signe d'un polynôme du second degré en p.

(4) Il conviendrait ici de distinguer l'accroissement de la durée de vie résultant d'une augmentation de p (transformation de la structure de risque), de celle résultant d'un accroissement de la durée de vie maximale.

(5) Nous décrivons donc ici un système idéal, où la gestion des caisses de retraite se fait sans coût et sans profit pour elle même.

L'équation (20) nous donne le rendement d'un franc investi dans un système de retraite par capitalisation. Lorsque la durée de vie est incertaine ($p < 1$), ce rendement est toujours strictement supérieur à celui de l'épargne privée. Cela est totalement dû au fait qu'un système de retraite par capitalisation permet de socialiser le risque de vie. L'acquisition de droit à la retraite par capitalisation est donc un actif qui domine strictement l'acquisition de capital privé, même si, in fine, le support de chacun de ces actifs est le même, à savoir ici du capital physique. On peut donc formuler la proposition suivante :

Proposition 1 *Dans un système de retraite par capitalisation, les agents préfèrent détenir l'intégralité de leur épargne sous forme de droits à la retraite.*

Nous pouvons donc maintenant écrire les contraintes budgétaires de la génération t :

$$b_t + w_t = c_{0,t} + z_t^c , \tag{21}$$

$$z_t^c \frac{1 + r_{t+1}}{p} = c_{1,t} . \tag{22}$$

En agrégeant (21) et (22) nous avons :

$$c_{0,t} + \frac{p}{1 + r_{t+1}} c_{1,t} = b_t + w_t . \tag{23}$$

Remarquons que seule la première génération à bénéficier du système de retraite par capitalisation va percevoir un héritage. En effet celui-ci résulte de l'épargne privée des générations précédentes. Comme dans notre modèle l'adhésion à un fond de pension domine totalement l'épargne privée, la possibilité d'héritage « accidentel » disparaît aux périodes suivantes.

Ce point est très important, car il montre que l'introduction d'un système de retraite par capitalisation modifie la répartition des richesses entre les générations en raison de la disparition de l'héritage accidentel qui en découle. L'épargne des agents morts prématurément est redistribuée aux vieux qui survivent, plutôt qu'aux jeunes sous forme d'héritage accidentel. Cela ne pouvait être compris dans le cadre des modèles à générations imbriquées avec durée de vie certaine. En particulier, l'introduction de la capitalisation va faire bénéficier la première génération d'une forme de repas gratuit, puisqu'elle va simultanément profiter d'un meilleur rendement de l'actif d'épargne et recevoir un héritage de la génération qui la précède sans en laisser à celle qui la suit. Remarquons que ce résultat ne dépend en rien de la forme de la fonction d'utilité puisque nous pouvons l'énoncer dès la présentation de la contrainte budgétaire.

Nous cherchons donc les valeurs de $c_{0,t}$, $c_{1,t}$ et z_t^c qui maximisent (6) sous la contrainte (23). La condition du premier ordre de ce programme :

$$\frac{u'(c_{0,t})}{u'(c_{1,t})} = \frac{c_{1,t}}{c_{0,t}} = \frac{1+r_{t+1}}{1+\theta} . \tag{24}$$

La comparaison des équations (7) et (24) nous permet de mettre en évidence l'apport essentiel du système de retraite par capitalisation que nous résumerons dans la proposition suivante :

Proposition 2 *En présence d'un système de retraite par capitalisation, le rapport entre les consommations réalisées aux différentes périodes ne dépend plus de la probabilité de survie.*

C'est en cela que l'on peut dire qu'un système de retraite par capitalisation répond à un motif d'assurance. Il permet de se prémunir contre le risque de vivre vieux et démuni. Grâce à lui, les individus vont vouloir « lisser » leur consommation de la même manière que si leur durée de vie avait été certaine.

Si l'on reporte le résultat (24) dans les contraintes budgétaires (23), (22) et (21) on trouve :

$$c_{0,t} = \frac{b_t + w_t}{1 + \frac{p}{1+\theta}} , \tag{25}$$

$$c_{1,t} = \frac{b_t + w_t}{1+\theta+p} (1 + r_{t+1}) , \tag{26}$$

$$z_t^c = p \frac{b_t + w_t}{1+\theta+p} . \tag{27}$$

L'introduction du système de retraite par capitalisation laisse inchangée la consommation de la première période[6]. Il permet de consommer plus en deuxième période. L'espérance d'utilité de chaque agent, et donc son bien-être, est supérieure.

2.2 L'équilibre du modèle avec production

Nous reprenons la fonction de production (11) pour déterminer le taux d'intérêt d'équilibre de l'économie lorsqu'il existe un système de retraite par capitalisation.

[6] Il est bien entendu que ce résultat particulier dépend totalement de la spécification de la fonction d'utilité que nous avons retenue.

La condition d'équilibre du modèle est la même que précédemment. Si l'on note k_t^c le capital par actif à l'équilibre dans l'économie avec système de retraite par capitalisation, on peut écrire :

$$k_{t+1}^c = \frac{1}{1+n} z_t^c . \tag{28}$$

Si l'on indice en T la première génération qui va pouvoir bénéficier du système de retraite par capitalisation, on va avoir :

$$k_{T+1}^c = \frac{p}{1+n} \frac{(1-p)k_T\left(1+\alpha A k_t^{\alpha-1}\right)+(1-\alpha)Ak_T^{\alpha}}{1+\theta+p} = g\left(k_T\right) \tag{29}$$

et

$$k_{t+1}^c = \frac{p}{1+n} \frac{(1-\alpha)A k_t^{c^{\alpha}}}{1+\theta+p} = g^c\left(k_t^c\right) \quad , \quad \forall t > T . \tag{30}$$

En posant $k_{t+1}^c = k_t^c$, on peut calculer le taux d'intérêt et le capital par tête à l'équilibre stationnaire :

$$\overline{r}^c = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1+\theta+p}{p} (1+n) > \overline{r} , \tag{31}$$

$$\overline{k}^c = \left(\frac{1}{(1-\alpha)A} \frac{1+\theta+p}{p} (1+n)\right)^{1/(\alpha-1)} < \overline{k} . \tag{32}$$

La mise en place d'un système de retraite par capitalisation semble donc à long terme induire un niveau de capital par tête inférieur dans l'économie. On montre aisément que cette proposition est non seulement vérifiée à l'état stationnaire du modèle, mais également pour la plus grande partie de la dynamique transitoire. En effet comme les fonctions (g) et (g^c) sont définies, continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}^*$, et comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \quad g(x) > g^c(x) , \tag{33}$$

on a donc

$$k_{T+1} = k_{T+1}^c$$

et

$$\forall t > T+1, \quad k_t > k_t^c . \tag{34}$$

Ces dynamiques sont illustrées par la Figure 2.

Cela nous conduit à la proposition suivante :

Proposition 3 *Dans une économie à générations imbriquées, en présence d'incertitude sur la durée de vie, l'introduction, à une période donnée, d'un système de retraite par capitalisation induit l'accumulation d'un capital par tête moins élevé à partir de la deuxième période qui suit cette introduction.*

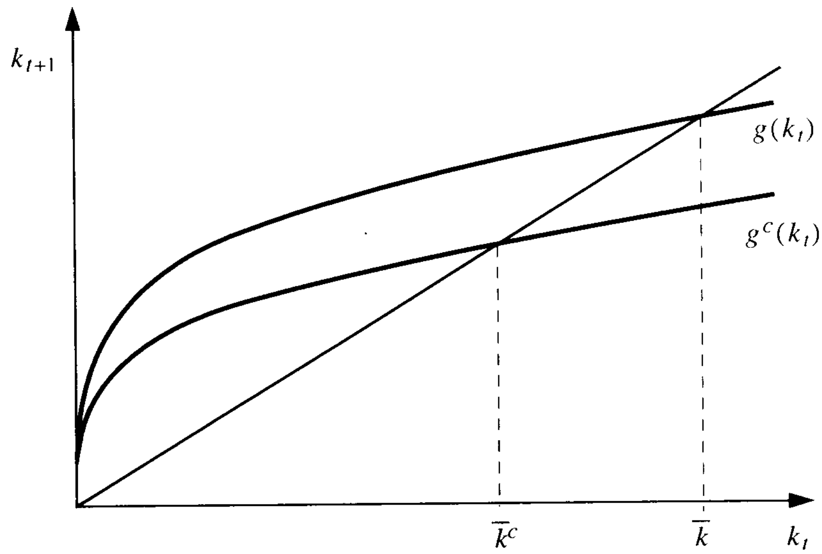

Figure 2
Comparaison des fonctions caractéristiques des dynamiques transitoires

Ce résultat remet en cause une idée largement enseignée selon laquelle l'épargne privée serait un parfait substitut à la cotisation à un système de retraite par capitalisation. Si l'on reprend, par exemple, le manuel de Blanchard et Fisher [1989][7] on peut lire: «*Fully funded social security has no effect on total savings and capital accumulation*». Cette croyance remonte au moins au «seminal paper» de Samuelson [1975], qui, dans son second théorème, énonce que «*any increase in "fully funded" social security merely displaces exactly as much private capital as the public capital it brings into being*». Le théorème de Samuelson n'est pas robuste à l'introduction d'une incertitude sur la durée de vie. En fait, on ne retrouve ce résultat que comme un cas particulier de notre modèle, lorsque $p = 1$.

L'introduction d'une incertitude sur la durée de vie, telle que nous la proposons, doit donc conduire à rejeter l'argument naïf selon lequel la retraite par capitalisation, contrairement à la retraite par répartition, n'a pas d'influence sur l'accumulation du capital. La raison en est simple. Les transferts des jeunes vers les vieux conduisent à une moindre accumulation. La répartition instaure de tels transferts. La capitalisation en supprimant un transfert des vieux vers les jeunes, à savoir l'héritage accidentel, va avoir un effet comparable.

---

[7] Chapitre 3, p. 111.

Mais la comparaison entre les systèmes de retraite ne peut se faire uniquement au regard de leurs effets prévisibles sur l'accumulation du capital. Ce qui importe finalement c'est leurs effets en termes de bien être.

Nous pouvons donc essayer de voir l'effet sur le bien-être de l'introduction de la capitalisation dans une économie de générations imbriquées avec durée de vie incertaine sans aucun système de retraite, telle que décrite au premier paragraphe. Cela nous conduit à envisager les conséquences de la mise en place d'un système par capitalisation pour chaque génération qui la décide et pour les générations suivantes. La proposition 1 nous montre que chaque génération préfère pour elle-même le système par capitalisation. La nature intragénérationnelle du système fait que le choix d'une génération ne s'impose pas aux générations suivantes. C'est bien le libre choix de chaque génération qui fait que le système perdure. Toutefois, la moindre accumulation qui en découle pénalise à terme la consommation des générations futures. L'introduction d'un système de retraite par capitalisation a donc un effet ambigu sur le bien être des générations futures, le gain assuranciel ne compensant pas nécessairement les conséquences négatives d'une moindre accumulation par les générations antérieures.

3 Système de retraite mixte

Dans un système de retraite mixte, on introduit un élément de répartition. Les jeunes cotisent à un système de retraite par capitalisation pour un montant z_t^c, fixé pour chaque génération suivant les modalités décrites au paragraphe précédent. De plus ils cotisent à un système de retraite par répartition pour un montant z^R, fixé une fois pour toutes, immédiatement reversées aux vieux de la génération précédente. À la période suivante, les survivants, devenus vieux, se partageront le montant des cotisations au système de retraite par répartition versées par la génération suivante.

3.1 Le cycle de vie de l'agent

La contrainte budgétaire du système de retraite par capitalisation est décrite par (20). La contrainte budgétaire de la partie répartition du système de retraite est donnée par :

$$\pi^R p N_t = z^R N_{t+1} ,$$

soit

$$\pi^R = z^R \frac{1+n}{p} . \tag{35}$$

avec π^R, le montant de la pension versée à chaque génération au titre du système de retraite par répartition.

Compte tenu de la proposition 1, on peut alors exprimer la contrainte budgétaire de l'agent :

$$\begin{aligned} b_t + w_t &= c_{0,t} + x_t^c + z^R , & (36)\\ z_t^c \frac{1+r_{t+1}}{p} + z^R \frac{1+n}{p} &= c_{1,t} . & (37)\end{aligned}$$

La consommation en deuxième période est égale aux cotisations de retraite augmentées de leurs rendements respectifs.

En agrégeant (36) et (37), on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$c_{0,t} + \frac{p}{1+r_{t+1}} c_{1,t} = n_t + w_t + z^R \left[\frac{1+n}{1+r_{t+1}} - 1\right] . \tag{38}$$

On retrouve l'égalité entre la valeur actuelle du profil de consommation et la richesse. On remarque, immédiatement que le système de retraite par répartition modifie la richesse de l'agent (terme de droite). Si le taux d'intérêt est inférieur au taux de croissance de la population cette modification est positive. L'agent bénéficie alors du fait que le rendement d'un franc investi dans la cotisation retraite par répartition a un rendement supérieur à celui d'un franc investi, directement ou indirectement, dans le capital physique. Cela veut dire qu'en cas de suraccumulation, la mise en place de la répartition améliore le bien-être. A l'inverse, si le taux d'intérêt est supérieur au taux de croissance de la population, la répartition est appauvrissante.

En maximisant (6) sous la contrainte (38), on obtient la condition (24). Ce qui nous permet d'exprimer la consommation de la génération t aux deux périodes, ainsi que le montant de la cotisation dans le système de retraite par capitalisation :

$$c_{0,t} = \frac{b_t + w_t + z^R \left[\frac{1+n}{1+r_{t+1}} - 1\right]}{1 + \frac{p}{1+\theta}} , \tag{39}$$

$$c_{1,t} = \frac{b_t + w_t + z^R \left[\frac{1+n}{1+r_{t+1}} - 1\right]}{1+\theta+p} (1+r_{t+1}) , \tag{40}$$

$$z_t^c = \frac{p}{1+\theta+p}\left[b_t + w_t - z^R \left(\frac{1+n}{1+r_{t+1}} \frac{1+\theta}{p} + 1\right)\right] = z_t^c\left(z^R\right) . \tag{41}$$

On remarque que la cotisation au système de retraite par capitalisation, et donc l'accumulation du capital, dépend négativement du montant de la cotisation au système de retraite par répartition.

3.2 L'équilibre du modèle avec production

Si l'on note k_t^m le capital par actif à l'équilibre dans l'économie avec système de retraite mixte, on peut écrire :

$$k_{t+1}^m = \frac{1}{1+n} z_t^c . \tag{42}$$

Si l'on indice en T la première génération qui va pouvoir bénéficier du système de retraite mixte, on obtient alors :

$$\begin{aligned} k_{T+1}^m &= \frac{p}{1+n} \\ &\times \frac{(1-p)k_T\left(1+\alpha A k_T^{\alpha-1}\right)+(1-\alpha)A k_T^{\alpha} - z^R\left(\frac{1+n}{1+r_{T+1}}\frac{1+\theta}{p}+1\right)}{1+\theta+p} \end{aligned} \tag{43}$$

et

$$k_{t+1}^m = \frac{p}{1+n}\frac{(1-\alpha)A k_t^{m^\alpha} - z^R\left(\frac{1+n}{1+r_{t+1}}\frac{1+\theta}{p}+1\right)}{1+\theta+p} \quad , \quad \forall t > T . \tag{44}$$

Ces deux équations caractérisent la dynamique d'accumulation du capital à l'équilibre pour un montant de cotisation au système par répartition de z^R. On remarque immédiatement que l'accumulation du capital est d'autant plus faible pour toutes les périodes futures que la cotisation au système de retraite par répartition est élevée. Ainsi, en choisissant un montant de cotisation au système de retraite par capitalisation, on peut sélectionner un profil d'accumulation. Nous pouvons donc maintenant préciser les caractéristiques d'un système de retraite optimal.

4 Le système de retraite optimal

Nous entendons ici système de retraite optimal au sens de Samuelson [1975]. Il s'agit du système qui, en régime permanent, permet à l'économie de vérifier la règle d'or, à savoir l'égalité entre le taux de croissance de la population et le taux d'intérêt(8). Pour bien comprendre la signification de ce critère d'optimalité, on peut se reporter à l'équation

(8) Comme nous le démontrons en annexe dans le cadre de notre modèle, la règle d'or caractérise une économie où l'espérance d'utilité de la consommation d'une

(37). Le système de retraite optimal est celui qui égalise les rendements marginaux des actifs, ici les droits à la retraite par capitalisation et les droits à la retraite par répartition. Les premiers vont permettre une assurance complète du risque de survie, alors que les seconds vont permettre d'ajuster de manière fine l'accumulation du capital pour rejoindre la règle d'or.

Nous choisissons donc le niveau optimal de cotisation au système par répartition $\hat{z}^R$ tel que :

$$\overline{r}^m = n \tag{45}$$

et donc :

$$\overline{k}^m = \left(\frac{n}{\alpha A}\right)^{1/(\alpha-1)}. \tag{46}$$

En reportant ces valeurs dans l'équation (44), on trouve :

$$\hat{z}^R = p\frac{(1-\alpha)A}{1+\theta+p}\left(\frac{n}{\alpha A}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} - (1+n)\left(\frac{n}{\alpha A}\right)^{1/(\alpha-1)}. \tag{47}$$

Nous pouvons donc formuler la proposition suivante :

Proposition 4 *Il existe un unique système de retraite tel que, en régime permanent :*

1. *La règle d'or est vérifiée ;*
2. *On ne peut améliorer le bien-être d'aucune génération en substituant des cotisations de retraite par capitalisation à l'épargne privée ou l'inverse.*

L'ensemble

$$\hat{Z}^R = \left\{\hat{z}^R, z_T^c\left(\hat{z}^R\right), z_{T+1}^c\left(\hat{z}^R\right), \ldots, z_{T+n}^c\left(\hat{z}^R\right), \ldots\right\}$$

définit ce système de retraite.

Ce résultat d'unicité du système de retraite optimal est l'apport principal de ce papier. C'est parce que nous avons introduit de l'incertitude sur la durée de vie qu'il diffère de celui énoncé par Samuelson [1975] dans son premier théorème. Pour ce dernier, c'est le montant de

---

génération à l'état stationnaire est maximale. Comme nous le remarquions en commentant l'équation (38) et comme Samuelson [1975] le souligne lui même, ce critère n'est compatible avec l'efficacité dynamique que lorsque la situation initiale est une situation de suraccumulation. En effet pour généraliser le critère paretien au cadre intertemporel, il faut prendre en compte le bien être de toutes les générations et donc s'intéresser à la dynamique transitoire.

la cotisation dans le système de retraite par répartition qui assure la réalisation de la règle d'or. La cotisation dans le système de retraite par capitalisation est un parfait substitut à l'épargne privée et n'induit pas de transferts intergénérationnels. N'importe quel niveau de capitalisation sociale est donc compatible avec la règle d'or. Il existe donc une infinité de systèmes de retraite optimaux. Dans notre modèle, la cotisation à un système de retraite par capitalisation est un actif qui domine strictement l'épargne privée.

5 Conclusion

Comme on peut le voir, l'introduction d'une durée de vie incertaine dans le modèle de Diamond [1965] permet de donner un cadre cohérent et unifié pour discuter les avantages comparés des différents systèmes de retraite. Cela nous a permis de montrer, que contrairement à une idée largement répandue, la capitalisation a, comme la répartition, mais pour d'autres raisons, un impact négatif sur l'accumulation du capital. La capitalisation permet de répondre de manière complète à un motif d'assurance, qui vient s'ajouter au motif de répartition intergénérationnelle illustré par la littérature habituelle sur les modèles à générations imbriquées.

La prise en compte de ces deux motifs dans un même modèle, plaide d'un point de vue normatif pour l'intégration systématique d'éléments de capitalisation dans les systèmes de retraite, à côté d'éléments de répartition lorsque ces derniers sont justifiés par des raisons d'efficacité dynamique. L'introduction d'une durée de vie incertaine dans les modèles à générations imbriquées permet donc de justifier l'existence d'éléments de capitalisation dans les systèmes de retraite par un autre motif que la simple myopie des agents et le paternalisme des pouvoirs publics.

Ces résultats nous semblent importants. Nous pensons qu'ils sont susceptibles de modifier sensiblement les termes du débat sur la réforme des systèmes de retraite. Dans ce but, nous les avons présentés dans un cadre que nous avons voulu le plus simple et le plus explicite possible. Cela nous a conduit à faire des hypothèses simplificatrices et à retenir des spécifications particulières des fonctions objectif. Celles-ci restreignent-elles la généralité des propositions faites dans ce papier?

L'hypothèse de péréquation des héritages permet de résoudre simplement le modèle. Comme nous l'avons remarqué, tant que la fonction d'utilité retenue est de la classe HARA, cette hypothèse est sans influence sur la dynamique du modèle agrégé. Si la spécification de fonction d'utilité est autre, alors la dynamique du modèle de laisser-faire va dépendre de la répartition des richesses dans l'économie et donc de l'héritage accidentel. Toutefois, comme la proposition 1 est obtenue directement à partir des contraintes budgétaires, quelle que soit la règle de dévolution des héritages, l'introduction de la capitalisation provoquera la disparition de l'héritage involontaire. Or, c'est précisément cette disparition qui est à l'origine de la proposition 3 et indirectement de la proposition 4. Celles-ci ont donc une validité générale.

En revanche, la prise en compte d'un héritage volontaire dans la ligne tracée par Yaari [1964], Hall [1967] ou encore Barro [1974], complique sensiblement l'analyse. En effet, l'héritage est aussi un moyen de socialiser partiellement le risque de survie entre les différentes générations d'une même famille. Toutefois, comme cette socialisation n'est que partielle, le motif d'assurance devrait continuer d'exister et donc l'intérêt de la retraite par capitalisation, ainsi que l'ensemble des résultats que nous avons dérivés.

ANNEXE

Etudions l'effet d'une variation de la cotisation au système de retraite par répartition dans le cadre d'un système de retraite mixte. Comme il s'agit d'établir un résultat général nous ne supposons que la croissance et la concavité des fonctions d'utilité et de production :

$$f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \quad u'(c) > 0, \quad u''(c) < 0\,.$$

En différenciant la relation (2) lorsque l'économie est en régime permanent, il vient :

$$dc_0 + \frac{p}{1+\overline{r}} dc_1 = d\overline{w} + dz^R \left[\frac{1+n}{1+\overline{r}} - 1\right] - z^R \frac{1+n}{(1+\overline{r})^2} d\overline{r} + \frac{p}{(1+\overline{r})^2} c_1 d\overline{r}$$

avec c_0 et c_1 la consommation de chaque période en régime permanent.

En utilisant le fait que :

$$d\overline{r} = f''\left(\overline{k}\right) d\overline{k}$$

et que

$$d\overline{w} = -\overline{k} f''\left(\overline{k}\right) d\overline{k}\,,$$

ainsi que les équations (37) et (42) on obtient :

$$dc_0 + \frac{p}{1+\overline{r}} dc_1 = \left[\overline{k} f''\left(\overline{k}\right) \frac{d\overline{k}}{dz^R} + 1\right] \left[\frac{1+n}{1+\overline{r}} - 1\right] dz^R\,.$$

En différenciant l'espérance d'utilité (6) et en utilisant l'équation (24), il vient :

$$\frac{dEU}{dz^R} = u'(c_0)\left[\bar{k}f''\left(\bar{k}\right)\frac{d\bar{k}}{dz^R}+1\right]\left[\frac{1+n}{1+\bar{r}}-1\right].$$

Il en découle, qu'en régime permanent, l'utilité de chaque génération est maximale quand la cotisation au système de retraite par répartition ajuste l'accumulation du capital de telle sorte que le taux d'intérêt soit égal au taux de croissance de la population.

BIBLIOGRAPHIE

ABEL, A.B. [1985], Precautionary saving and accidental bequests, *American Economic Review*, **5**(4), pp. 777–791.

ALLAIS, M. [1947], *Economie et Intérêt*, Paris, Imprimerie Nationale.

BARRO, R.J. [1974], Are Government bonds net wealth?, *Journal of Political Economy*, **82**(6), pp. 1095–1118.

BLANCHARD, O.J., et S. FISCHER [1989], *Lectures on Macro-economics*, Cambridge (Mass.), MIT Press.

DIAMOND, P.A. [1965], National debt in a neo-classical growth model, *American Economic Review*, **55**(5), pp. 1126–1150.

DIAMOND, P.A. [1977], A framework for social security analysis, *Journal of Public Economics*, **8**,pp. 275–298.

HALL, R. [1967], The allocation of wealth among the generations of a family that lasts forever : A theory of inheritance, working paper, repris in *The Rational Consummer*, MIT Press, Cambridge (Mass.), 1990, pp. 3-19.

KARNI, E., et I. ZILCHA [1989], Aggregate and distributional effects of fair social security, *Journal of Public Economics*, **40**(1), pp. 37-56.

SAMUELSON, P.A. [1975], Optimum social security in a life cycle growth model, *International Economic Review*, **16**(3), pp. 539–544.

YAARI, M.E. [1964], On the consumer lifetime allocation process, *International Economic Revue*, **5**(3), pp. 304–317.

YAARI, M.E. [1965], Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consummer, *Review of Economic Studies*, **32**, April, pp. 137–150.